1. Números e Álxebra:

Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{se} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j, e I é a matriz identidade.)

$A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=2 \\ (-1)^j (i-1) & \text{se } i \neq 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A+I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Rango $A = 2$

2 Filas ($i=2$, $i=3$) linealmente independientes

$$|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } A+I = 3$$

A no es invertible $\qquad$ $(A+I)$ es invertible

$$(A+I)^{-1} = \frac{Adj(A+I)^T}{|A+I|}$$

$$(A+I)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(Adj\ (A+I)^T) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2 + m + 6 + 0 - (0 + 3m + 6 + 0) =$$
$$= m^2 + m \cancel{+6} - 3m \cancel{-6} = m^2 - 2m = 0$$
$$\iff m \cdot (m-2) = 0 \to \boxed{m=0},\ \boxed{m=2} \quad \boxed{\text{Rango } A < 3}$$

Caso 1: $m=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{escojo } \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\lvert A_1\rvert = 0$	*	*	*	
$\lvert A_2\rvert$	*	*		*
$\lvert A_3\rvert$	*		*	*
$\lvert A_4\rvert$		*	*	*

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad C_1 \text{ y } C_2 \text{ L.D.}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+0+0-(0+3+0) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A^* = 3$$

Como Rango $A = 2 \neq$ Rango $A^* = 3 \Rightarrow$ S. I.

Caso 2 $m=2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

En A escojo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Rango $A = 2$

$\lvert A_1\rvert = 0$	*	*	*	
$\lvert A_2\rvert \to$	*	*		*
$\lvert A_3\rvert \to$	*		*	*
$\lvert A_4\rvert \to$		*	*	*

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los determinantes 3x3 contenidos en A^* dan cero; esto implica que Rango $A^* = 2$

Como Rango A = Rango $A^* = 2 < N = 3 \Rightarrow$ S.C.I.

(Sistema compatible indeterminado)

Resuelvo por parametrización:

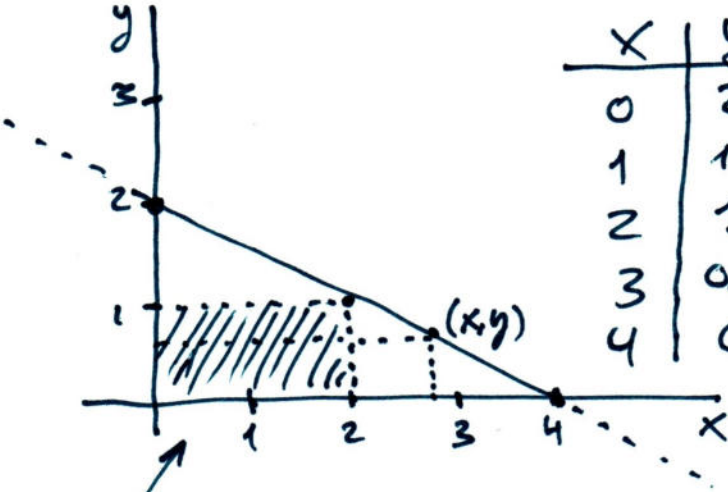
$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 2 \\ 2y + 3z = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{y = \alpha} \Rightarrow \boxed{x = 2 - 2\alpha}$$
$$3z = 1 - 2y \to \boxed{z = \frac{1-2\alpha}{3}}$$

Caso 3. $m \neq 0$ y $m \neq 2$ Rango A = Rango $A^* = 3 = N$

Resuelvo por Cramer $\Rightarrow$ S.C.D.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 \\ m+1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix}}{m \cdot (m-2)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{m \cdot (m-2)} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix}}{m \cdot (m-2)}$$

3. Análise:
De entre todos os rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x + 2y = 4$, determine os vértices do que ten maior área.



x	y
0	2
1	1.5
2	1
3	0.5
4	0

$x + 2y = 4$

$2y = 4 - x$

$y = \frac{4 - x}{2}$

$\underline{y = -\frac{1}{2} \cdot x + 2}$

ligadura

Área = b.h.

$A(x,y) = x \cdot y$ ← fórmula a maximizar

$A(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

$A'(x) = -x + 2 = 0$ → máximos... si y solo si $\underline{x = 2}$

$\boxed{x = 2}$

en este caso $A(2) = -\frac{1}{2} 2^2 + 2 \cdot 2 = 2$ unidades cuadradas

4. Análise:

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de f e as rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

Piden el área entre la función:

$$\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ \text{La recta: } y = 4x - 7 \\ \text{La recta horizontal } y = 1 \end{cases}$$

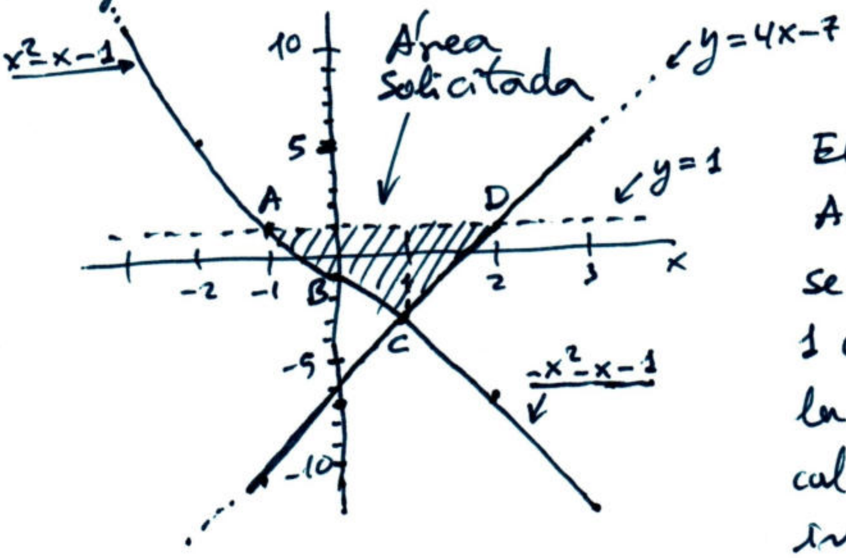
$f(x)$	5	1	-1	-3	-7	-13
x	-2	-1	0	1	2	3

$f(x)$	-15	-11	-7	-3	1	5
x	-2	-1	0	1	2	3

Criterio de continuidad para $f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 - x - 1 = -1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim -x^x - x - 1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$f(0) = -1$



El área entre $A(-1,1)$ y $C(1,-3)$ se calcula desplazando 1 unidad hacia abajo la función $f(x)$ y calculando la integral habitual.

Función desplazada una unidad:

$$f^*(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\underset{[-1,0]}{\text{Área}} = \int_{-1}^{0} (x^2 - x - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right|_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{7}{6}$$

$$\underset{[0,1]}{\text{Área}} = \int_0^1 (-x^2 - x - 2)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right|_0^1 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) + 0 = -\frac{17}{6}$$

$$\underset{[1,2]}{\text{Área}} = -\frac{b \cdot a}{2} = -\frac{1 \cdot 4}{2} = -2$$

$$\text{Área total} = \frac{7}{6} + \frac{17}{6} + 2 = \underline{6 \text{ unidades}}$$

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x+3y+2z-6=0$.

a) Ecuación implícita del plano que pasa por:

$A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}=(-1,2,0)\\ \vec{AC}=(-1,0,3)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{vectores directores del plano.}$$

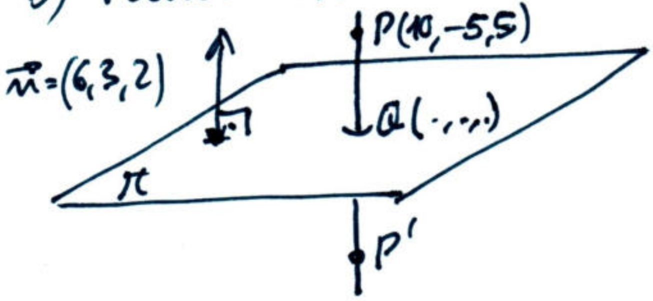
$\vec{AX}=(x-1,\ y,\ z) \Rightarrow$ vector genérico del plano.

Como $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AX}$ deben ser linealmente dependientes, entonces se cumple que:

$$0=\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1)+3y+2z=0 \iff \boxed{6x+3y+2z-6=0}$$

es la ecuación solicitada de π.

b) Punto simétrico de $P(10,-5,5)$ respecto a π.



calculo la recta r perpendicular a π que pasa por P: para ello uso como vector director el vector normal: $\vec{n}=(6,3,2)$

$$r:\begin{cases} x=6t+10\\ y=3t-5\\ z=2t+5\end{cases} \Rightarrow \frac{x-10}{6}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-5}{2} \Rightarrow$$

Hallamos Q $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-30=6y+30\\ 2x-20=6z-30\end{array}\right\} \left.\begin{array}{ll} 3x-6y=60\\ 2x-6z=-10\end{array}\right\} r$$

Intersección de π y r: $\longrightarrow$ $6x+3y+2z=6 : \pi$

despejando: $x=3z-5$ (de la 2ª ecuación de r.)

$$\left.\begin{array}{l} 3.(3z-5)-6y=60\\ 6\cdot(3z-5)+3y+2z=6\end{array}\right\} \begin{array}{l} 9z-15-6y=60\\ 18z-30+3y+2z=6\end{array} \left\{\begin{array}{l}-6y+9z=75\\ 3y+20z=36\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}-6y+9z=75\\ 6y+40z=72\end{array}\right\} \quad 49z=147 \quad \boxed{z=\frac{147}{49}=3}$$

$\boxed{x=4}$ $\boxed{y=-8}$

$Q(4,-8,3) \rightarrow \vec{PQ}=(-6,-3,-2)$

$\vec{OP'}=\vec{OQ}+\vec{PQ}$

$\boxed{P'(-2,-11,1)}$

6. Xeometría:

a) Ache o valor de a se o plano $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$

b) Estude a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función do parámetro m.

6.a) $\pi: ax + y + z = 0$ que sea paralelo a la recta

$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

$\pi: \begin{cases} \text{vector normal: } \vec{n} = (a, 1, 1) \\ \text{punto: } A(0,0,0) \end{cases}$

$r: \begin{cases} \text{vector director: } \vec{v} = (1,1,1) \\ \text{punto: } B(1,1,2) \end{cases}$

Para que el plano y la recta sean paralelos se cumplirá que el vector $\vec{n}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares. Esto es; si $\vec{n} \bullet \vec{v} = 0$.

$(a,1,1) \bullet (1,1,1) = 0 \iff a + 1 + 1 = 0 \iff \boxed{a = -2}$

6b.) Posición relativa de:

$\pi_1: 2x + y + mz + m = 0 \longrightarrow \vec{n}_1 = (2, 1, m)$; $P(0, -m, 0)$

$\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0 \longrightarrow \vec{n}_2 = (m-1, 1, 3)$; $Q(0,0,0)$

Caso 1: π_1 y π_2 pueden ser paralelos si:

$\frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2 = m - 1 \rightarrow \boxed{m = 3} \\ 6 = m^2 - m \rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{m = 3} \\ \cancel{m = -2} \end{cases}$

Si $m = 3$ los planos efectivamente son paralelos.

$\left.\begin{array}{l} \pi_1: 2x + y + 3z + m = 0 \\ \pi_2: 2x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ En cuyo caso, si $m = 0$ los planos serán coincidentes.

Caso 2: si $m \neq 3$

Entonces los planos no son paralelos y se cortan en la recta que es combinación de sus ecuaciones

$\left.\begin{array}{l} 2x + y + mz + m = 0 \\ (m-1)x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ recta de intersección

7. Estatística e Probabilidade:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule $P(A)$ sabendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga se os sucesos A e B son ou non independentes, se se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{e} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

7.a) Calcular $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2 \cdot P(A)$ y que $P(A \cap B) = 0{,}1$ → Los sucesos son compatibles y que $P(A \cup B) = 0{,}8$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0{,}8 = P(A) + 2 \cdot P(A) - 0{,}1$$

$$0{,}8 = 3 \cdot P(A) - 0{,}1$$

$$3 \cdot P(A) = 0{,}9 \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{0{,}9}{3} = 0{,}3}$$

7.b) Decir si los sucesos A y B son independientes si se sabe que:

$P(A) = 0{,}6$

$P(B) = 0{,}3$

y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}82$

$P(A)$ es independiente de $P(B)$ si $P(A/B) = P(A)$

o sea, que $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

Me dan $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}82$, que por las leyes de Morgan se traduce a que:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}82 \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = 1 - 0{,}82$$

$$P(A \cap B) = 0{,}18$$

calculo: $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}3} = 0{,}6 = P(A)$.

Como se cumple la condición, entonces podemos afirmar que los suceso A y B son independientes

8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:

a) A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.

b) A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

Probabilidad de que una persona contagie una enfermedad a otra persona: 10% → 0,10

Entra en contacto con 8 personas.

a) Probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas:

$$P(0,1,2) = \binom{8}{0} 0{,}10^0 \cdot 0{,}9^8 + \binom{8}{1} 0{,}10^1 \cdot 0{,}9^7 + \binom{8}{2} 0{,}10^2 \cdot 0{,}9^6 =$$

<u>distribución ~~binomial~~</u>: $p = 0{,}10$; $q = 0{,}9$; $n = 8$

$$= 0{,}430 + 0{,}383 + 0{,}149 = 0{,}962 \rightarrow$$ <u>96,2% de probabilidad</u>

b) Probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

$$P(2,3,4,5,6,7,8) = \binom{8}{2} 0{,}10^2 \cdot 0{,}9^6 + \binom{8}{3} 0{,}10^3 \cdot 0{,}9^5 +$$

$$+ \binom{8}{4} 0{,}10^4 \cdot 0{,}9^4 + \binom{8}{5} 0{,}10^5 \cdot 0{,}9^3 + \binom{8}{6} 0{,}10^6 \cdot 0{,}9^2 + \binom{8}{7} 0{,}10^7 \cdot 0{,}9^1 +$$

$$+ \binom{8}{8} \cdot 0{,}10^8 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}149 + 0{,}033 + 0{,}0045 + \ldots$$

números muy cercanos a probabilidad cero.

$$\simeq 0{,}187 \rightarrow \boxed{18{,}7\,\%}$$

También se puede hacer:

$$P(2,3,4,5,6,7,8) = 1 - P(0,1) = 1 - \binom{8}{0} 0{,}10^0 \cdot 0{,}9^8 - \binom{8}{1} 0{,}10^1 0{,}9^7 =$$

$$= 1 - 0{,}430 - 0{,}383 = 0{,}187 \rightarrow \boxed{18{,}7\,\%}$$

Ambos apartados se pueden hacer por la NORMAL con la técnica de tipificación: $\mu = 0{,}8$; $\sigma = 0{,}72$